I вариант разбор теста

1. Так как все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9. В задаче не сказано, что люди одинаковые, так что априори считаем, что личность человека важна. С учетом этого становится ясно, что используются размещения из n различных элементов по m элементов, где $n = 9,\ m = 4$. Число таких размещений находим по формуле: $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$. Получаем: $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.
Ответ:3024

2. Воспользуемся формулой
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
тогда получим
$$\frac{(x+1)!}{(x-2)!3!} + \frac{2(x-1)!}{(x-4)!3!} = 7(x-1),$$
откуда после сокращения первой дроби на $(x-2)!$, а второй дроби на $(x-4)!$, получим
$$(x+1)x(x-1) + 2(x-1)(x-2)(x-3) = 42(x-1).$$
Далее, учитывая, что $x \neq 1$, сокращаем на $(x-1)$ и получаем квадратное уравнение
$$x^2 + x + 2(x^2 - 5x + 6) = 42$$
или
$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$
Корни уравнения: $x = 5,\ x = -2$(второй не подходит по смыслу задачи).
Ответ: 5.

3. Так как ординаты вершин A и B равны, то $AB||Ox$. Из трех отрезков $OA,\ AB,\ Ob$ сторонами параллелограмма могут быть только OA и AB, так как по условию OB - диагональ. Поэтому $BC||OA$ и $C(5;\ 0)$. По формуле расстояния между точками $OB = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100},\ AC = \sqrt{(5-3)^2+(0-6)^2} = \sqrt{40}$, такми образом, $OB : AC = \sqrt{100} : \sqrt{40} = \sqrt{2,5}$ - искомое отношение диагоналей.
Теперь получим уравнения сторон. OA имеет вид $y = kx + b$, где $k = 6 : 3 = 2$ и $b = 0$; следовательно, $y = 2x$. Уравнение стороны AB - $y = 6$. Далее, так как $BC||OA$, то угловой коэффициент прямой BC есть $k = 2$, а соответствующее ему значение b найдем из уравнения $y = 2x + b$, подставив в него вместо x и y координаты точки $C(5 <\ 0)$; тогда получим $0 = 10 + b$, т.е. $b = -10$, значит уравнение BC имеет вид $y = 2x - 10$. Наконец, уравнение OC есть $y = 0$. Чтобы найти уравнение диагоналей AC, воспользуемся тем, что точки $A(3;\ 6),\ C(5;\ 0)$ принадлежит прямой AC и, следовательно, их координаты удовлетворяют искомому уравнению. Подставив эти координаты в уравнение $y = kx + b$, получим $6 = 3k + b,\ 0 = 5k + b$, откуда $k = -3,\ b = 15$. Итак, $y = -3 + 15$ есть уравнение диагонали AC.
Ответ: $OB : AC = \sqrt{2,5},\ y = 0(OC),\ y = 6(AB),\ y = 2x(OA),\ y = 2x - 10(BC)$, $y = -3x + 15(AC)$.

4. Используя формулу арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_2 d = 30 \\ a_3 + a_5 = 32 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_1 + d)d = 30 \\ a_1 + 2d + a_1 + 4d = 32 \end{cases}$$

Отсюда находим два решения 1) $a_1 = 1,\ d = 5;$ 2) $a_1 = 7,\ d = 3$. Для каждого из них воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

1) При $a_1 = 1,\ d = 5$ получаем

$$112 = \frac{2 + 5(n-1)}{2} \cdot n,$$

откуда $n_1 = 7,\ n_2 = -6,4$. Второй не подходит. В этом случае первые три члена таковы:1, 6, 11.

2) При $a_1 = 7,\ d = 3$ получаем

$$112 = \frac{14 + 3(n-1)}{2} \cdot n,$$

откуда $n_1 = 7,\ n_2 = -\frac{32}{3}$. Второй не подходит. В этом случае первые три члена таковы: 7, 10, 13.

Заметим, что в обоих случаях число членов равно 7.

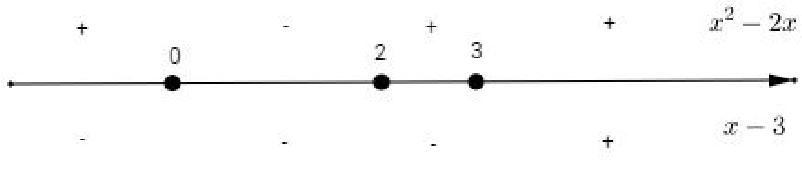
Ответ: 7 членов, 1, 6, 11 или 7, 10, 13

5.

$$|x^2 - 2x| - |x - 3| = x - 2$$

Для начала нужно определить промежутки знакопостоянства функций.

Разберём отдельно каждый из промежутков:



1) $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ 3]$

$$x^2 - 2x - (3 - x) = x - 2$$

$$x^2 - 2x - 1$$

Корни данного квадратного уравнения: $1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2}$. Первый корень находится в промежутке $[2;\ 3]$, второй - в промежутке $(-\infty;\ 1]$.

2) $(0;\ 2)$

$$2x - x^2 - (3 - x) = x - 2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Корнем данного квадратного уравнения является: 1. Этот корень принадлежит рассматриваемому промежутку.
3) $(3;\ +\infty)$

$$x^2 - 2x - (x - 3) = x - 2$$
$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

У данного квадратного уравнения нет корней.
Ответ: $1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2},\ 1$

II вариант разбор теста

1. Различных дробей можно составить

$$C_6^2 \cdot 2 = \frac{6!}{4!2!} \cdot 2 = 5 \cdot 6 = 30.$$

C_6^2 способами выбираем два числа из 6, и двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число - числитель, другое знаменатель и наоборот. Из этих дробей ровно 15 будут правильными.
Ответ: 30; 15

2. Согласно формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1),$$

находим
$$A_x^2 = \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = x(x-1).$$

Далее, используя формулы $C_n^k = C_n^{n-k}$ и формулу числа сочетаний без повторений, получим
$$C_x^{x-1} = C_x^{x-(x-1)} = C_x^1 = \frac{x!}{1!(x-1)!} = x.$$

Поэтому данное уравнение примет вид

$$x^2(x-1) = 48$$

$$x^2(x-1) = 4^2 \cdot 3$$

Следовательно, $x = 4$
Ответ: 4

3. По условию, $AC = 15$ см, $BD = 8$ см, откуда находим координаты вершин ромба: $A(-7,5;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $C(7,5;\ 0)$, $D(0;\ -4)$. Угловой коэффициент прямой BC есть

$$k_1 = \operatorname{tg}\angle BCN = -\operatorname{tg}\angle BCO = -\frac{4}{7,5} = -\frac{8}{15}.$$

Тогда, зная координаты точки B, составим уравнение стороны BC:

$$y - 4 = -\frac{8}{15}(x - 0)$$

или $8x + 15y - 60 = 0$. Уравнение стороны AD найдем по её известному угловому коэффициенту

$$k_1 = -\frac{8}{15}$$

так как $AD||BC$ и координатам точки D:

$$y + 4 = -\frac{8}{15}(x - 0),$$

или $8x + 15y + 60 = 0$. Далее, угловой коэффициент прямой AB есть

$$k_2 = \operatorname{tg}\angle BAO = \frac{4}{7,5} = \frac{8}{15}$$

и уравнение стороны AB записывается в виде $8x - 15y + 60 = 0$, а уравнение стороны DC - в виде $8x - 15y - 60 = 0$. Теперь проведем $OK \perp BC$ и для нахождения OK воспользуемся тем, что

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}OC \cdot OB = \frac{1}{2}OK \cdot BC,$$

откуда

$$OK = \frac{OC \cdot OB}{BC}.$$

Поскольку $BC = \sqrt{7,5^2 + 4^2} = 8,5$, находим

$$OK = \frac{7,5 \cdot 4}{8,5} = \frac{60}{17}$$

Ответ: $8x - 156 + 60 = 0(AB),\ 8x - 15y - 60 = 0(DC),\ 8x + 15y - 60 = 0(BC),$ $8x + 15y + 60 = 0(AD),\ \frac{60}{17}$

4. Используя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$, получаем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = -49 \\ b_2 b_3 = 14 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} b_1(1 + q^3) = -49 \\ b_1 q(1 + q) = 14 \end{cases}$$

Отсюда следует, что

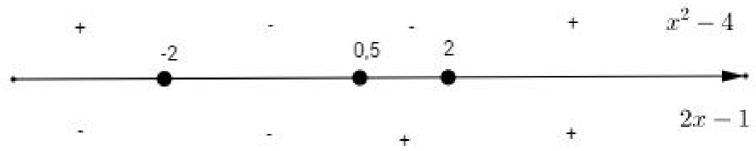
$$\frac{1 - q + q^2}{q} = -\frac{49}{14}$$

или $2q^2 + 5q + 2 = 0$, т.е. $q_1 = -2,\ q_2 = -0,5$. Тогда искомыми четырьмя числами являются 7, -14, 28, -56
Ответ: 7, -14, 28, -56

5.

$$|x^2-4|+|2x-1|=x+1$$

Определим сначала промежутки знакопостоянства: Разберём отдельно каждый



из промежутков:
1) $(-\infty;\ -2]$

$$x^2-4+(1-2x)=x+1$$
$$x^2-3x-4=0$$

Корнями данного квадратного уравнения являются: 4, -1. Оба корня не принадлежат рассматриваемому промежутку.
2) $(-2;\ 0,5]$

$$4-x^2+1-2x=x+1$$
$$x^2+3x-4=0$$

Корнями данного квадратного уравнения являются: -4, 1. Оба корня не принадлежат рассматриваемому промежутку.
3) $(0,5;\ 2]$

$$4-x^2+2x-1=x+1$$
$$x^2-x-2=0$$

Корнями данного квадратного уравнения являются: 2, -1. Первый корень принадлежит рассматриваемому промежутку, второй нет.
4) $(2;\ +\infty)$

$$x^2-4+2x-1=x+1$$
$$x^2+x-6=0$$

Корнями данного квадратного уравнения являются: 2, -3. Оба корня не принадлежат рассматриваемому промежутку.
Ответ: 2